Universidade Federal de Minas Gerais

ELT088 - Análise de Sistemas Dinâmicos Lineares

Transformada de Laplace e Diagrama de Bode

Autores:
Felipe Meireles Leonel
Gabriel Costa Matsuzawa

29 de dezembro de 2023

Sumário

1 Transformada de Laplace **2**
1.1 Exemplos 2

2 Polos e Zeros **5**

3 Região de convergência (RDC) **6**

4 Transformada inversa de Laplace **7**
4.1 Exemplos 7

5 Teoremas do valor final e do valor inicial **8**
5.1 Teorema do valor final 8
5.2 Teorema do valor inicial 8
5.3 Exemplo 9

6 Diagrama de blocos **9**
6.1 Linearidade 9
6.2 Convolução no tempo 10
6.3 Realimentação 10
6.4 Exemplos 11

7 Diagrama de Bode **13**
7.1 Termo constante 13
7.2 Termo derivativo 14
7.3 Termo integrativo 15
7.4 Polo de **1ª** ordem 16
7.5 Dois polos de **1ª** ordem 17
7.6 Polos de **2ª** ordem 18
7.7 Exemplo 19

1 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace funciona como uma generalização da transformada de Fourier, em que é introduzindo um fator de amortecimento $e^{-\sigma\, t}$ e é definida como:

$$x(t) \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-s\, t}\, dt$$

Em que $s = \sigma + j\omega$, ou seja, σ é a parte real de s e ω a parte imaginária.

Para a transformada de Laplace, também temos que definir uma região de convergência, que vai depender dos valores para os quais a transformada converge.

1.1 Exemplos

ex. 1) $x(t) = e^{-\alpha\, t}\, u(t)$, em que α é real:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\, t}\, u(t)\, e^{-s\, t}\, dt$$

Como o degrau $u(t)$ é igual a zero para $t < 0$ e igual a um para $t \geq 0$, tem-se:

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\, t}\, e^{-s\, t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+\alpha)\, t}\, dt$$

Integrando:

$$X(s) = \frac{1}{-(s+\alpha)} e^{-(s+\alpha)\, t} \,|_0^{\infty} = 0 - (\frac{1}{-(s+\alpha)})$$

$$X(s) = \frac{1}{s+\alpha}$$

Substituindo $s = \sigma + j\omega$:

$$X(s) = \frac{1}{(\sigma+\alpha) + j\omega}$$

Para que a função convirja, temos que $\sigma + \alpha > 0$, caso contrário ela irá crescer linearmente. Assim, considerando que σ é $Re\{s\}$ (parte real de s):

$$X(s) = \frac{1}{s+\alpha},\ Re\{s\} > -\alpha$$

Portanto, a transformada irá convergir para todos os valores de σ maiores que $-\alpha$, como observado abaixo:

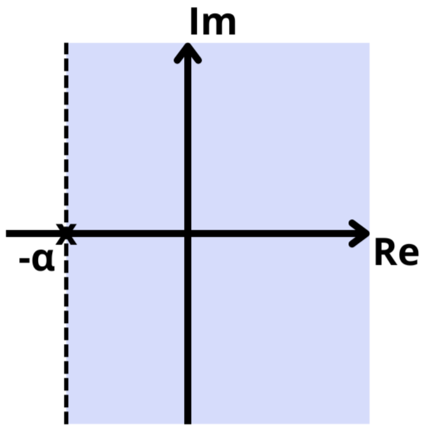

Figura 1: Região de convergência do exemplo 1

ex. 2) $x(t) = 3e^{-2t}\,u(t) - 2e^{-t}\,u(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [3e^{-2t}\,u(t) - 2e^{-t}\,u(t)]\,e^{-st}\,dt$$

Separando os termos e integrando:

$$X(s) = 3\int_{0}^{\infty} e^{-2t}\,e^{-st}\,dt - 2\int_{0}^{\infty} e^{-t}\,e^{-st}\,dt$$

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}$$

Dessa forma, percebe-se que teremos uma região de convergência para cada termo, sendo:

$$3e^{-2t}\,u(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{3}{s+2},\ Re\{s\} > -2$$

$$-2e^{-t}\,u(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{-2}{s+1},\; Re\{s\} > -1$$

Para que ambas as condições sejam verdadeiras, tem-se $Re\{s\} > -1$. Expandindo:

$$x(t) = 3e^{-2t}\,u(t) - 2e^{-t}\,u(t) \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2},\; Re\{s\} > -1$$

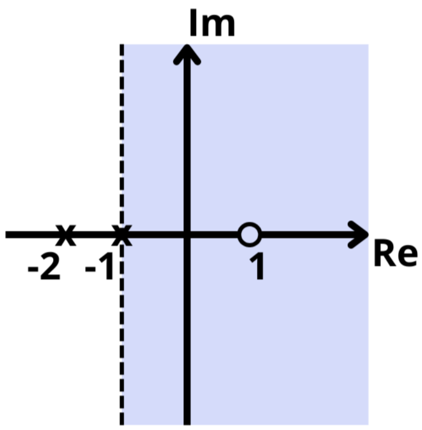

Figura 2: Região de convergência do exemplo 2

ex. 3) $x(t) = e^{-2t}\,u(t) + e^{-t}\,cos(3t)\,u(t)$

Lembrando que $cos(kt) = \frac{1}{2}e^{jkt} + \frac{1}{2}e^{-jkt}$, tem-se que $cos(3t) = \frac{1}{2}e^{j3t} + \frac{1}{2}e^{-j3t}$:

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-2t}\,e^{-st}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(s+1-j3)t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(s+1+j3)t}\,dt$$

Resolvendo as integrais separadamente:

$$e^{-2t}\,u(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{s+2},\; Re\{s\} > -2$$

$$e^{-(1-j3)t}\,u(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{s+1-j3},\; Re\{s\} > -1$$

$$e^{-(1+j3)t}\,u(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{s+1+j3},\; Re\{s\} > -1$$

Dessa forma, usando o mesmo raciocínio do exemplo 2:

$$x(t) = e^{-2t}\,u(t) + e^{-t}\,cos(3t)\,u(t) \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)},\ Re\{s\} > -1$$

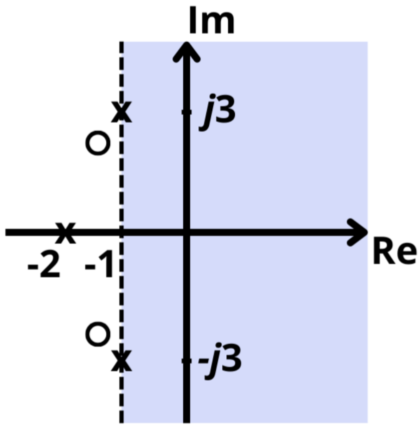

Figura 3: Região de convergência do exemplo 3

2 Polos e Zeros

Como visto nos exemplos anteriores, a transformada de Laplace e sua região de convergência são definidas a partir da relação entre a parte real de s e do sinal referente. Assim, podemos definir a RDC (região de convergência) a partir de um diagrama de polos e zeros em que:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- **Polos:** raízes do denominador $D(s)$, marcados com um 'x'
- **Zeros:** raízes do numerador $N(s)$, marcados com um 'o'

De acordo com o exemplo 3 acima, tem-se:

$$X(s) = \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)}$$

Igualando o numerador a zero:

$$2s^2 + 5s + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-71}}{4} \approx -1,25 \pm j2,11$$

Agora zerando o denominador:

$$(s^2 + 2s + 10)(s + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad s + 2 = 0 \quad \because \quad s = -2$$

$$(s^2+2s+10)(s+2) = 0 \quad \rightarrow \quad s^2+2s+10 = 0 \quad \because \quad s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = -1 \pm j3$$

Portanto, temos os zeros quando $s = -1,25 \pm j2,11$ e os polos quando $s = -2$ ou $s = -1 \pm j3$, como mostrado na figura 3.

3 Região de convergência (RDC)

a) A RDC de $X(s)$ consiste de faixas paralelas ao eixo $j\omega$ (imaginário);

b) Se $x(t)$ tem duração finita, então a RDC é todo o plano s;

c) Se $X(s)$ é racional, então sua RDC é limitada por polos ou se estende até o infinito;

d) Se $x(t)$ for lateral direito, então a RDC é $Re\{s\} > \sigma_R$

e) Se $x(t)$ for lateral esquerdo, então a RDC é $Re\{s\} < \sigma_L$

f) Se $x(t)$ for bilateral, então a RDC é $\sigma_R < Re\{s\} < \sigma_L$

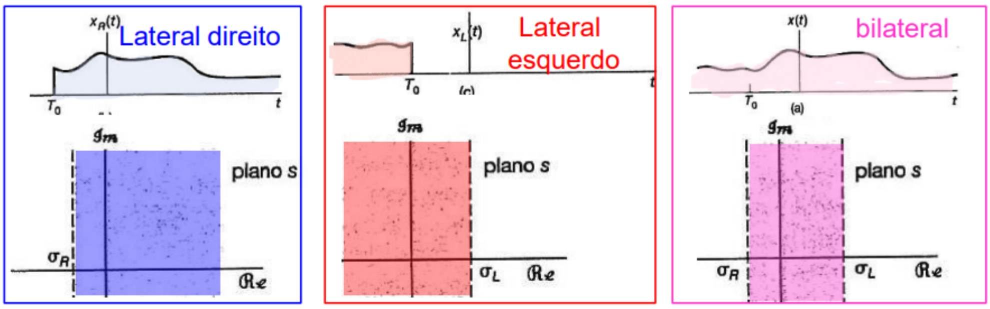

Figura 4: Sinais lateral direito, lateral esquerdo e bilateral e suas RDCs

4 Transformada inversa de Laplace

Usamos a transforma inversa para encontrar $x(t)$ a partir de $X(s)$ baseado na relação:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds$$

Entretanto, o cálculo dessa integral se demonstra ter uma dificuldade elevada dependendo de $X(s)$, então se $X(s)$ é racional fazemos a expansão em frações parciais para encontrar valores já tabelados.

$$X(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)} = \frac{A}{s+p_1} + \frac{B}{s+p_2} + ... + \frac{N}{s+p_n}$$

4.1 Exemplos

ex. 1) $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, Re\{s\} > -1$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

Para determinar A e B, multiplicamos $X(s)$ pelo dominador respectivo e substituímos s pelo valor da raiz do denominador:

$$A = X(s)\,(s+1)\,|_{s=-1} = \frac{1}{s+2}\,|_{s=-1} = \frac{1}{-1+2} = 1$$

$$B = X(s)\,(s+2)\,|_{s=-2} = \frac{1}{s+1}\,|_{s=-2} = \frac{1}{-2+1} = -1$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Como visto anteriormente, $e^{-\alpha t}\,u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$ e como sabemos que $x(t)$ é lateral direito pela condição da RDC, logo tem-se:

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \quad \leftrightarrow \quad x(t) = e^{-t}\,u(t) - e^{-2t}\,u(t)$$

ex. 2) $X(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}, Re\{s\} < -1$

$$A = X(s)\,(s+1)\,|_{s=-1} = \frac{s-1}{s-2}\,|_{s=-1} = \frac{-1-1}{-1-2} = \frac{2}{3}$$

$$B = X(s)\,(s-2)\,|_{s=2} = \frac{s-1}{s+1}\,|_{s=2} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$X(s) = \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{\frac{1}{3}}{s-2}$$

Atentando nesse caso que o sinal é lateral esquerdo pela RDC, encontra-se:

$$X(s) = \frac{\frac{2}{3}}{s+1} - \frac{\frac{1}{3}}{s-2} \quad \leftrightarrow \quad x(t) = -\frac{2}{3}e^{-t}\,u(-t) - \frac{1}{3}e^{2t}\,u(-t)$$

5 Teoremas do valor final e do valor inicial

O uso desses teoremas nos permite avaliar o comportamento do sistema no domínio do tempo sem a necessidade de calcular a transformada inversa de Laplace.

5.1 Teorema do valor final

Esse teorema nos diz para qual valor o sinal irá convergir quando tender ao infinito. Obviamente que o teorema só é valido se $x(t)$ convergir, ou seja, $\lim_{t\to\infty} x(t) < \infty$:

$$x(t)\,|_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0}\; s\,X(s)$$

5.2 Teorema do valor inicial

Analogamente ao teorema do valor final, esse teorema informa o que acontece quando o sinal tende a zero:

$$x(t)\,|_{t\to 0} = \lim_{s\to\infty}\; s\,X(s)$$

5.3 Exemplo

Dado $X(s) = \frac{1}{s+1}$, $Re\{s\} > -1$, pelo teorema do valor final:

$$x(t)\,|_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0}\; s\,\frac{1}{s+1} = \lim_{s\to 0}\; \frac{s}{s+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

Assim, descobrimos que $x(t)$ tende a zero quando vai pro infinito. Da mesma forma:

$$x(t)\,|_{t\to 0} = \lim_{s\to\infty}\; \frac{s}{s+1} = \frac{\infty}{\infty+1} = 1$$

Portanto, sabemos que o sinal é igual a 1 quando $t = 0$ e que tende a 0 quando t vai para o infinito.

6 Diagrama de blocos

A representação em blocos é muito útil para interpretar visualmente o funcionamento de um sistema. Vale ressaltar que para um mesmo sistema é possível representá-lo de várias maneiras diferentes.

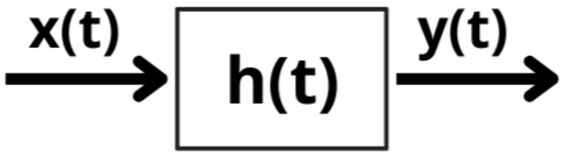

Figura 5: Representação em blocos de $y(t) = h(t)\,x(t)$

6.1 Linearidade

Pela propriedade de linearidade de sistemas, é possível somar respostas de sistemas diferentes, assim:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \qquad\qquad H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

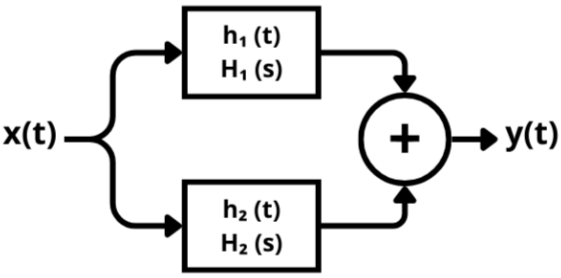

Figura 6: Linearidade

6.2 Convolução no tempo

A convolução no domínio do tempo de sistemas equivale a multiplicação desses sistemas no domínio da frequência.

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \qquad\qquad H(s) = H_1(s)\ H_2(s)$$

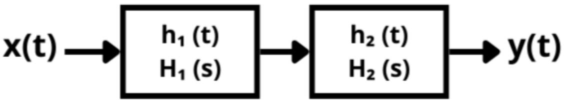

Figura 7: Convolução no tempo

6.3 Realimentação

Sistemas com realimentação são aqueles que a entrada consiste tanto da entrada $x(t)$ como da resposta $y(t)$ adiantada.

Pelo figura abaixo, percebe-se que a saída $y(t)$ será $e(t)$ convoluído com $h_1(t)$:

$$Y(s) = H_1(s)\ E(s)$$

Entretanto, vê-se que $E(s) = X(s) - Z(s)$ e, por sua vez, $Z(s) = H_2(s)\ Y(s)$:

$$Y(s) = H_1(s)\ [X(s) - Z(s)] = H_1(s)\ [X(s) - [H_2(s)\ Y(s)]]$$

Isolando $Y(s)$:

$$Y(s)\,[1 + H_1(s)\ H_2(s)] = H_1(s)\ X(s)$$

Resolvendo para o sistema geral $H(s)$:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)\ H_2(s)}$$

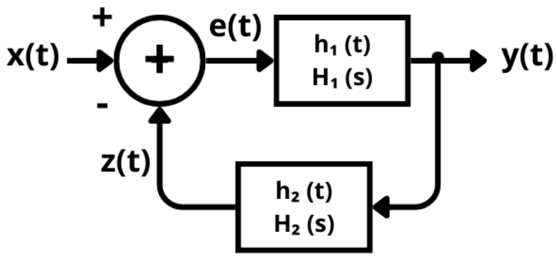

Figura 8: Convolução no tempo

6.4 Exemplos

ex. 1) $H(s) = \frac{1}{s+3}$

Dividindo o numerador e o denominador por s:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + 3\frac{1}{s}}$$

Assim, a equação acima se assemelha a equação do sistema com realimentação:

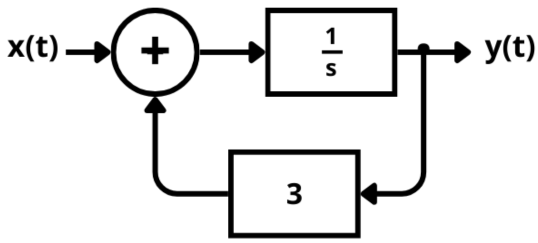

Figura 9: Diagrama do bloco 1

ex. 2) $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$

Como no exemplo anterior, podemos dividir ambos os membros por $\frac{1}{s}$:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1+1\frac{1}{s}}\frac{\frac{1}{s}}{1+2\frac{1}{s}}$$

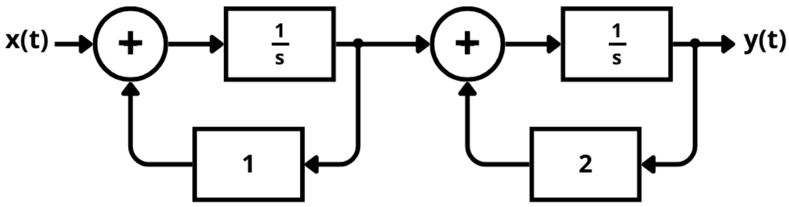

Figura 10: Diagrama do bloco 2.1

Podemos também fazer a decomposição em frações parciais e após isso fazer a divisão:

$$H(s) = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)} = \frac{\frac{1}{s}}{1+1\frac{1}{s}} - \frac{\frac{1}{s}}{1+2\frac{1}{s}}$$

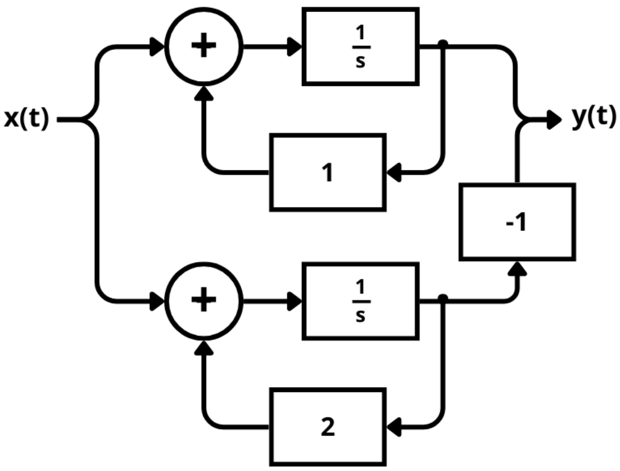

Figura 11: Diagrama do bloco 2.2

7 Diagrama de Bode

O diagrama de Bode é uma representação gráfica da resposta em frequência de um sistema, mostrando tanto a magnitude do sinal como a fase dele. Utilizamos a escala logarítmica para representar uma faixa mais ampla de frequências (unidade de decibel (dB)).

$$Y(j\omega) = H(j\omega)\ X(j\omega)$$

$$\angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(j\omega)$$
$$log_{10}\ |Y(j\omega)| = log_{10}\ |H(j\omega)| + log_{10}\ |X(j\omega)|$$

$$|Y(j\omega)|_{dB} = 20\, log_{10}\, |Y(j\omega)|$$

7.1 Termo constante

$$H(j\omega) = K$$

Determina-se o módulo:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\, log_{10}\ |K|$$

Assim, o módulo será constante para toda frequência, já a fase vai depender do valor de K, visto que se K for positivo a fase será igual à zero e se for negativo a fase será $\pm 180°$:

$$\angle H(j\omega) = 0,\ \ se\, K \geq 0$$
$$\angle H(j\omega) = \pm\,\pi,\ \ se\, K \leq 0$$

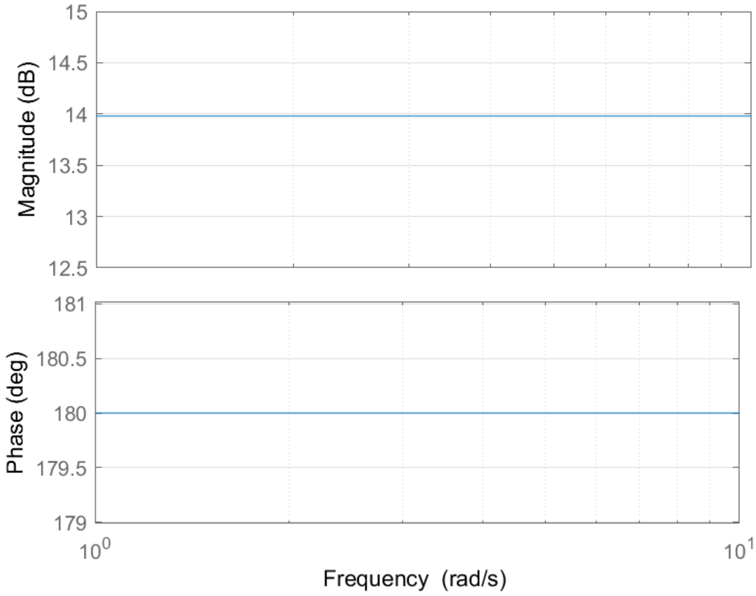

Figura 12: Módulo e fase para $H(j\omega) = -5$

7.2 Termo derivativo

A multiplicação de um sinal por $H(j\omega) = j\omega$ tem o mesmo efeito que realizar a derivação desse sinal, assim é extremamente importante saber o comportamento dele no domínio da frequência:

$$H(j\omega) = j\omega$$

$$|H(j\omega)| = 20\ log_{10}\,(\sqrt{\omega^2}) = 20\ log_{10}\,\omega$$

Essa função se assemelha a função linear $y = ax$, assim:

$$y\ \leftrightarrow\ |H(j\omega)| \qquad a\ \leftrightarrow\ 20 \qquad x\ \leftrightarrow\ log_{10}\,\omega$$

Já como $H(j\omega)$ é puramente imaginário e positivo, o fase será igual a 90°:

$$\angle H(j\omega) = \frac{\pi}{2}$$

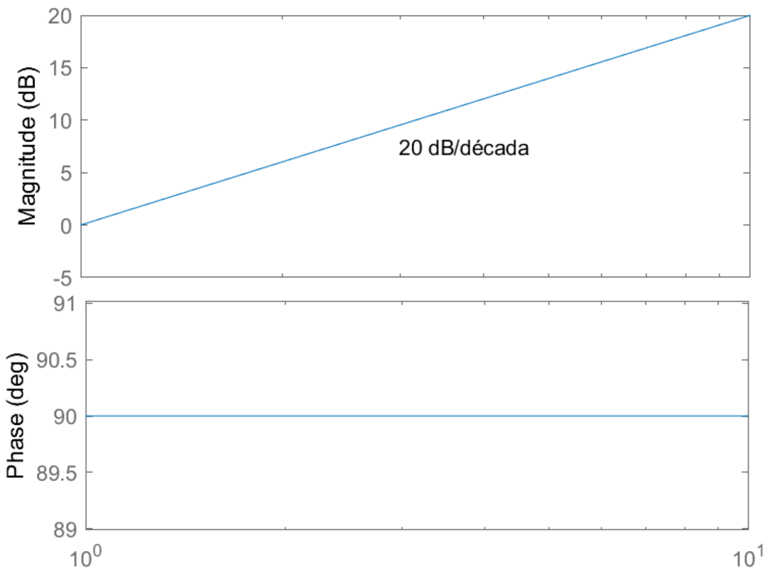

Figura 13: Módulo e fase para $H(j\omega) = j\omega$

7.3 Termo integrativo

De maneira análoga, para integrar um sinal basta fazer a multiplicação por $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$|H(j\omega)| = 20\ log_{10}\,(1) - 20\ log_{10}\,(\sqrt{\omega^2}) = -20\ log_{10}\,\omega$$

Assim, o termo integrador funciona similar ao termo derivativo, porém com inclinação negativa, e a fase será igual a -90°:

$$\angle H(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

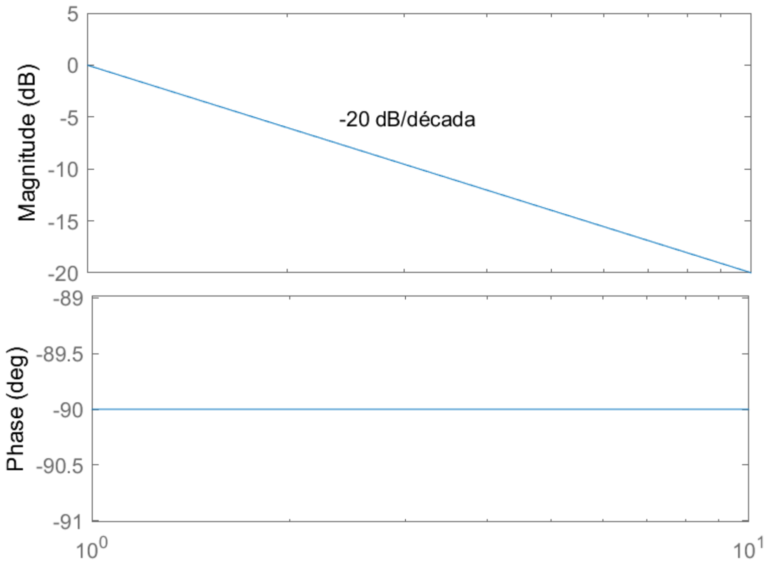

Figura 14: Módulo e fase para $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

7.4 Polo de 1ª ordem

Para um polo de 1^a ordem, tem-se:

$$H(s) = \frac{1}{1+s\tau} \quad \rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau},$$

em que τ é uma constante.

Determinando o módulo:

$$|H(j\omega)| = 20\ log_{10}\,(1) - 20\ log_{10}\,|j\omega\tau + 1| = -20\ log_{10}\,\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1^2}$$

Agora, vamos analisar os diferentes comportamentos da função acima, se $\omega\tau$ for muito maior que 1, se $\omega\tau$ for muito menor que 1 e se ω for igual a $\frac{1}{\tau}$:

$$\begin{aligned}
\omega\tau >> 1 \quad &\rightarrow \quad |H(j\omega)| = -20\ log_{10}\,(\omega\tau) = -20 log_{10}\,\omega - 20 log_{10}\,\tau \\
\omega\tau << 1 \quad &\rightarrow \quad |H(j\omega)| = -20\ log_{10}\,(1) = 0 \\
\omega = \frac{1}{\tau} \quad &\rightarrow \quad |H(j\omega)| = -20\ log_{10}\,(\omega\tau) = -20\ log_{10}\,(1) = 0
\end{aligned}$$

Ou seja, o módulo é igual a zero para frequências menores e decresce linearmente para frequências maiores com uma inclinação de -20 dB/déc. O ponto de transição entre um comportamento e outro é na frequência de corte $\omega_c = \frac{1}{\tau}$. Já a fase:

$$\omega\tau >> 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{j\omega\tau + 1} = \frac{1}{j\omega\tau} = -\frac{j}{\omega\tau} \quad \rightarrow \quad \angle H(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega\tau << 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{j\omega\tau + 1} = \frac{1}{1} \quad \rightarrow \quad \angle H(j\omega) = 0$$

$$\omega = \frac{1}{\tau} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{j\omega\tau + 1}\frac{-j\omega\tau + 1}{-j\omega\tau + 1} = \frac{1 - j\omega\tau}{1^2 + \omega^2\tau^2} \quad \rightarrow \quad \angle H(j\omega) = tg^{-1}(-\omega\tau) = -\frac{\pi}{4}$$

Dessa forma, a fase se inicia em 0°, passa por -45° quando $\omega = \frac{1}{\tau}$, e após termina em -90°.

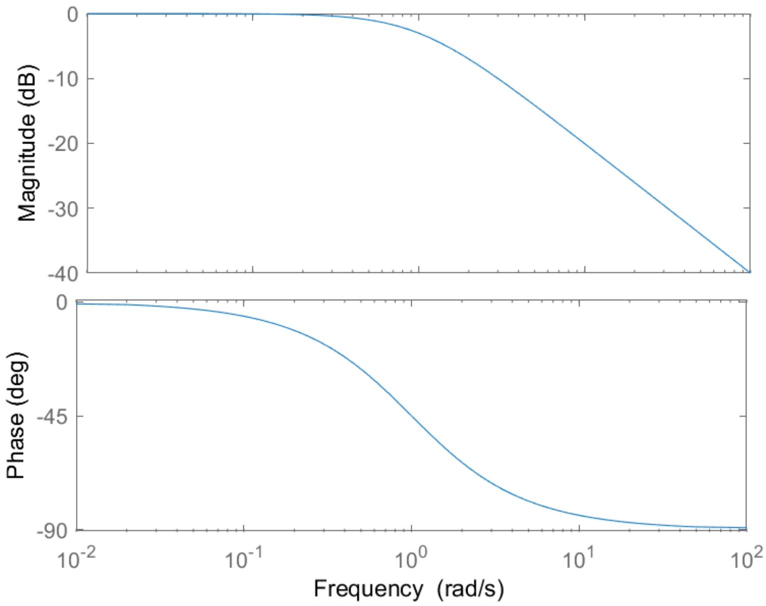

Figura 15: Módulo e fase para $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$

7.5 Dois polos de 1ª ordem

Para o caso de dois polos reais:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau_1 + 1}\frac{1}{j\omega\tau_2 + 1}$$

O comportamento na frequência será o mesmo para o caso de apenas um polo, com cada um dos polos "contribuindo"com um declínio de -20dB/déc na magnitude e uma queda de $-\frac{\pi}{2}$ na fase (totalizando -40dB/déc e $-\pi$):

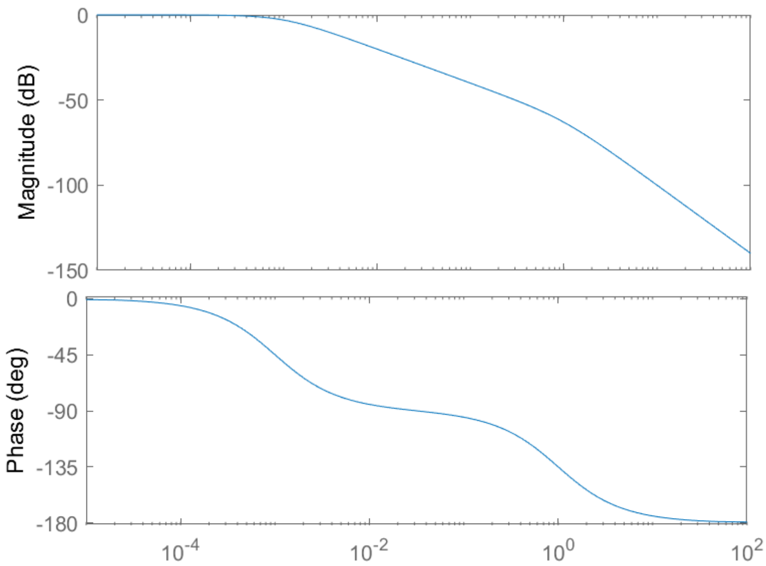

Figura 16: Módulo e fase para $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 1000$

7.6 Polos de 2ª ordem

Quando temos polos de 2^a ordem, temos dois polos complexos conjugados, da forma geral:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\frac{\omega}{\omega_n})^2 + 2\zeta(j\frac{\omega}{\omega_n}) + 1}$$

Fazendo a análise da magnitude:

$$H(j\omega) = -20\ log_{10}\,[(j\frac{\omega}{\omega_n})^2 + 2\zeta(j\frac{\omega}{\omega_n}) + 1]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\omega}{\omega_n} >> 1 \quad &\rightarrow \quad -20\ log_{10}\,(\frac{\omega}{\omega_n})^2 = -40\ log_{10}\,\frac{\omega}{\omega_n} \\
\frac{\omega}{\omega_n} << 1 \quad &\rightarrow \quad -20\ log_{10}\,1 = 0 \\
\frac{\omega}{\omega_n} = 1 \quad &\rightarrow \quad -20\ log_{10}\,(j^2 + 2j\zeta + 1) = -20\ log_{10}\,2\zeta
\end{aligned}$$

Assim, a magnitude é zero para frequências baixas, decresce a -40dB/déc para frequências altas e quando $\omega = \omega_n$ e tem-se um pico que vai depender do valor de ζ. Para a fase, como temos dois polos sabemos que partirá de zero e chegará a $-\pi$, sendo que a curva para juntar esses pontos dependerá também do valor de ζ.

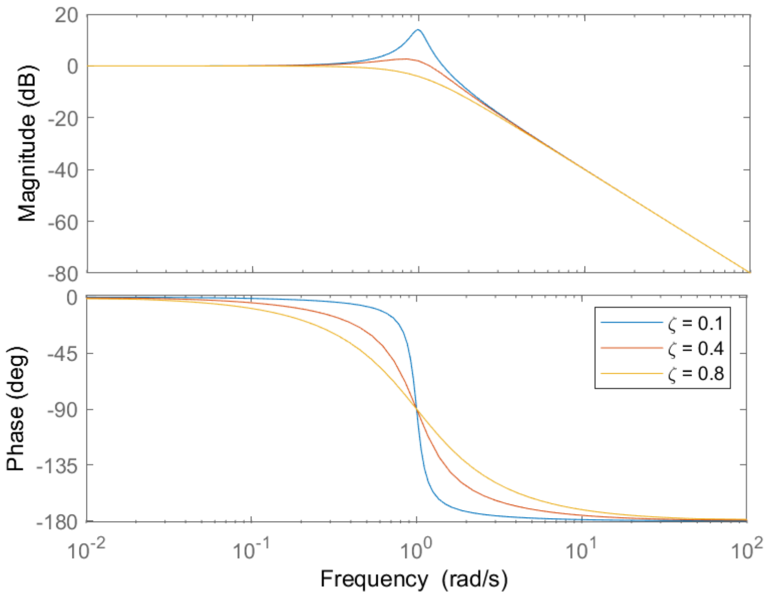

Figura 17: Módulo e fase para $\zeta = 0.1, \zeta = 0.4$ e $\zeta = 0.8$

7.7 Exemplo

$$H(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)[(j\omega)^2 + j\omega + 2]}$$

Para determinar o diagrama de Bode do exemplo acima, podemos separar os termos para encontrar similares àqueles que já conhecemos seus comportamentos:

$$H(j\omega) = \frac{10(\frac{j\omega}{3} + 1)\,3}{(j\omega)(\frac{j\omega}{2} + 1)\,2[(\frac{j\omega}{\sqrt{2}})^2 + \frac{j\omega}{2} + 1]\,2} = \frac{7,5(\frac{j\omega}{3} + 1)}{(j\omega)(\frac{j\omega}{2} + 1)[(\frac{j\omega}{\sqrt{2}})^2 + \frac{j\omega}{2} + 1]}$$

Assim, no numerador tem-se uma constante e um polo real, e no denominador temos um polo real, dois polos complexos conjugados e um termo integrador. Para resolver, traçamos os gráficos de cada termo separadamente e após juntamos todos.

Comparando os termos, encontramos $\omega_n = \sqrt{2}$ e $\zeta = 0,35$:

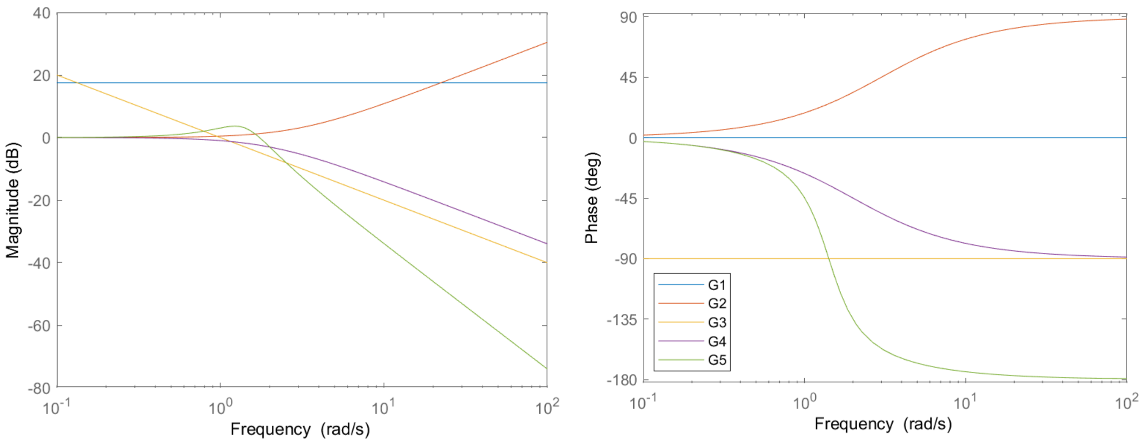

Figura 18: Módulo e fase de todos os membros de $H(j\omega)$

Em que G1 é a representação da constante 7.5, G2 é o membro $(\frac{j\omega}{3}+1)$, G3 é o termo integrador, G4 é $(\frac{j\omega}{2}+1)$ e G5 são ambos os polos complexos conjugados. Assim, para determinar o diagrama de $H(j\omega)$ basta apenas juntar todos os membros em uma curva:

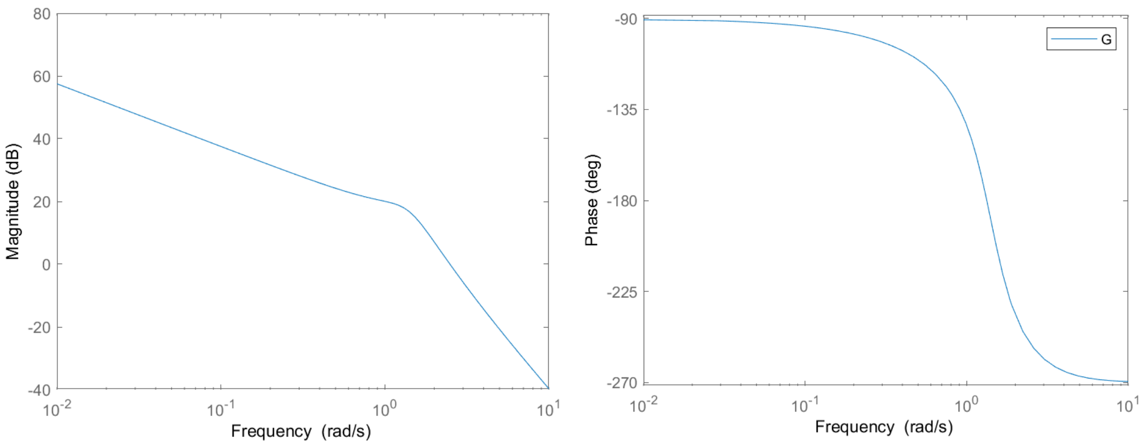

Figura 19: Módulo e fase de $H(j\omega)$

Ou seja, a magnitude é composta apenas pelo termo constante e o termo integrador até $\omega \approx 0$, quando os outros termos deixam de ser zero. Vale ressaltar que a angulação da curva se inicia em -20 dB/déc, diminui para -60 dB/déc em $\omega = 0$ quando os polos complexos também influenciam, diminui novamente para -80 dB/déc em $\omega = 2$ por causa de $(\frac{j\omega}{2}+1)$ e retorna a -60 dB/déc em $\omega = 3$ por causa do termo no numerador restante. Já a fase consiste apenas do termo complexo G5 deslocado pelo termo integrador, já que a fase para a constante é zero e os dois polos de 1^o grau basicamente se anulam.