Universidade Federal de Minas Gerais

ELT088 - Análise de Sistemas Dinâmicos Lineares

Série e Transformada de Fourier

Autores:
Felipe Meireles Leonel
Gabriel Costa Matsuzawa

20 de dezembro de 2023

Sumário

1 Série de Fourier

A série de Fourier é uma forma de escrever sinais periódicos como uma soma infinita de exponenciais complexas. Representamos essa série a partir da seguinte expressão:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad\qquad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

Sendo ω_0 a frequência fundamental do sinal, podendo ser calculada pela seguinte expressão:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

sendo T o menor período possível do sinal.

O coeficiente a_k nos dá a informação de quanto uma determinada frequência influência no sinal, ou seja, quanto menor for o a_k a frequência $k\omega_0$ irá influenciar menos na construção do sinal e o inverso também é verdade. Sendo esse coeficiente expresso pela seguinte expressão:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} x(t)e^{-j\omega_0 t}dt \qquad\qquad a_k = \frac{1}{T}\sum_{n=-T}^{+T} x(t)e^{-j\omega_0 n}$$

Quando tratamos o coeficiente a_k como uma função obtemos o espectro das frequências que são múltiplos inteiros da frequência fundamental do nosso sinal.

1.1 Condições para a Existência da Série

Para ser possível expressar um sinal periódico por uma Série de Fourier ele precisa apresentar as seguinte 3 condições:

1. Integralidade absoluta.

$$\int_{-T}^{+T} |x(t)|dt < \infty \qquad\qquad \sum_{k=-T}^{+T} |x[k]| < \infty$$

2. Número de máximo e mínimos finitos em um intervalo.
3. Número finito de descontinuidades em um período.

1.2 Convergência

A Série de Fourier para um sinal x(t) converge para x(t) nas continuidades do sinal e para as descontinuidades a Série converge para a média dos limites laterais da descontinuidade.

1.3 Propriedades

1.3.1 Linearidade

A Série de Fourier é uma função de transformação linear, ou seja, uma soma de entradas ponderadas gera na saída uma soma ponderada das saídas de cada entrada.

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{SF}} a_k$$
$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{SF}} b_k$$
$$Ay(t) + Bx(t) \xrightarrow{\mathcal{SF}} Aa_k + Bb_k$$

1.3.2 Deslocamento no tempo

Ao encontrar a Série de Fourier para um sinal x(t) deslocada obtemos os coeficientes a_k relacionados à função multiplicado por um termo de deslocamento.

$$x(t - t_0 \xrightarrow{\mathcal{SF}} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

1.3.3 Derivação no Tempo

Ao encontrar a Série de Fourier para a derivada de um sinal x(t) obtemos os seguintes coeficientes a_k.

$$\frac{d}{dt}x(t) \xrightarrow{\mathcal{SF}} jk\omega_0 a_k$$

1.3.4 Integração no Tempo

Ao encontrar a Série de Fourier para a integral de um sinal x(t) obtemos os seguintes coeficientes a_k.

$$\int x(t)dt \xrightarrow{\mathcal{SF}} \frac{1}{jk\omega_0} a_k$$

1.3.5 Relação entre Multiplicação e Convolução

Essa relação nos diz que a multiplicação de dois sinais x(t) e y(t) é igual a convolução dos termos a_k da Série de Fourier dos dois sinais.

$$x(t) \cdot y(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} a_\tau b_{k-\tau}$$

1.3.6 Relação de Parseval

Essa relação nos diz que a potência de um sinal periódico será igual a energia dos coeficientes a_k de sua Série de Fourier.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

1.3.7 Mudança de Escala de Tempo

Ao encontrar a Série de Fourier de um sinal x(t) com tempo dilatado ou contraído obtemos os mesmos termos a_k do sinal x(t), porém a frequência fundamental é multiplicada pelo coeficiente de mudança de escala de tempo.

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jk(\alpha\omega_0)t}$$

1.3.8 Simetrias

Ao realizar a Série de Fourier de um sinal x(t) podemos observar algumas simetrias nos termos a_k analisando algumas características de x(t). Sendo estas as relações de simetria abaixo.

1. Para um sinal x(t) real e par, ao encontrar a Série de Fourier os termos a_k serão valores reais.
2. Para um sinal x(t) real e ímpar, ao encontrar a Série de Fourier os termos a_k serão valores puramente imaginários.
3. Para um sinal x(t) apenas real, ao encontrar a Série de Fourier os termos a_k terão tanto a parte real quando a parte imaginária, de forma que:

$$a_K = B_k + jC_k$$

$$B_k \Rightarrow sinal\ par$$
$$C_k \Rightarrow sinal\ ímpar$$

Representando os termos a_k como uma exponencial complexa obtemos as seguintes relações:

$$a_k = A_k e^{j\theta_k}$$
$$A_k \Rightarrow sinal\ par$$
$$\theta_k \Rightarrow sinal\ ímpar$$

1.4 Exemplo

Dada a onda quadrada expressa pela seguinte expressão:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t < |T_1| \\ 0, & |T_1| < t < |T| \end{cases}$$
$$x(t+T) = x(t)$$

Para calcular a Série de Fourier deste sinal na forma:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

É necessário calcular o termo ak por meio da seguinte expressão:

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} x(t)e^{-j\omega_0 t}dt$$

Sendo os limites de integração justificados pelo fato de que para valores de t entre T e T_1 o sinal vale 0, ou seja, não influencia na integral. Desenvolvendo a expressão anterior obtemos:

$$a_k = \frac{1}{T}(\frac{-e^{-jk\omega_0 T_1}}{jk\omega_0} + \frac{e^{-jk\omega_0 T_1}}{jk\omega_0})$$

$$a_k = -\frac{1}{T}(\frac{e^{-jk\omega_0 T_1}}{jk\omega_0} - \frac{e^{-jk\omega_0 T_1}}{jk\omega_0})$$

Utilizando a identidade abaixo:

$$sen\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

Conseguimos encontrar a seguinte expressão para os termos ak.

$$a_k = \frac{2j}{T}\frac{sen(jk\omega_0 T_1)}{jk0T1}$$

Dessa forma, a Série de Fourier para o sinal analisado é dado por:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2j}{T}\frac{sen(jk\omega_0 T_1)}{jk\omega_0 T_1} e^{jk\omega_0 t}$$

2 Transformada de Fourier

A partir da Série de Fourier conseguimos descrever o comportamento de sinais periódicos na frequência por meio dos coeficientes ak, porém não é possível fazer essa descrição com sinais não periódicos. Assim, para sinais não periódicos utilizamos a Transformada de Fourier.

2.1 Definicão

De forma geral, a Transformada de Fourier é o coeficiente ak da Série de Fourier sendo calculado com o período tendendo para o ∞. Realizando a transformada obtemos o espectro de frequências completo do sinal original sendo possível observar as frequências que mais influenciam em sua construção. A expressão usada para realizar a transformada é a seguinte.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Para realizar a transformada inversa, ou seja, voltar para o sinal original utilizamos a seguinte expressão.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

2.2 Transformada de Fourier para Sinais Periódicos

Anteriormente foi dito que utilizamos a Transformada de Fourier para calcular o espectro de frequências de sinais não periódicos, porque não é possível encontrar a Série de Fourier desses sinais e consequentemente não é possível analisar os coeficientes a_k. Porém também é possível calcular a Transformada de Fourier para sinais periódicos passado os coeficientes a_k do eixo k para o eixo ω. Importante ressaltar que quando analisamos os termos a_k como função estamos observando a influência do termo k para a construção do sinal, sendo este termo intimamente ligado com as frequências que compõem o sinal pois a influência de k é proporcional a influência da frequência $k\omega_0$. Para realizar a transformada e observamos a influência de cada frequência em vez da influência de cada k utilizamos a seguinte expressão.

$$X(j) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

2.3 Condições para a existência da transformada

Para um sinal x(t) apresentar Transformada de Fourier ele deve ter as seguintes características.

1. Ser absolutamente integrável.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < \infty \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]| < \infty$$

2. Ter um número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo finito.
3. Ter um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo finito e, ainda, cada descontinuidade deve ser finita.

2.4 Propriedades

2.4.1 Linearidade

A Transformada de Fourier é uma função de transformação linear, ou seja, uma soma de entradas ponderadas gera na saída uma soma ponderada das saídas de cada entrada.

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(j\omega) = AX(j\omega) + BY(j\omega)$$

2.4.2 Deslocamento no Tempo

Ao fazer o deslocamento no tempo de um sinal sua transformada recebe uma exponencial como fator de deslocamento.

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-jt_0} X(j\omega)$$

2.4.3 Deslocamento em Frequência

Ao aplicar um fator de deslocamento na entrada é possível fazer um deslocamento na frequência da seguinte forma.

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j(\omega - \omega_0))$$

2.4.4 Derivação no Tempo

Ao fazer a derivação de um sinal a sua transformada é multiplicada por jω.

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n X(j\omega)$$

2.4.5 Integração no Tempo

Ao fazer a integração de uma função no intervalo de $-\infty$ a t faz com que sua transformada seja dividida por $j\omega$ e acrescida de um termo relacionado às condições iniciais do sinal.

$$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

2.4.6 Mudança de Escala de Tempo

Ao fazer uma dilatação ou contração do tempo de um sinal obtemos a seguinte alteração na transformada.

$$x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a})$$

2.4.7 Relação entre Convolução e Multiplicação

Essa propriedade nos diz que a convolução de dois sinais no domínio do tempo é igual a multiplicação das transformadas dos dois sinais.

$$x(t) * y(t) = X(j\omega) \cdot Y(j\omega)$$

2.4.8 Relação de Parseval

Essa relação nos diz que a energia de um sinal é igual a energia da transformada na frequência dividida por 2π.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

2.4.9 Dualidade

Essa propriedade nos diz a relação entre a transformada de um certo sinal x(t) com o seu equivalente na frequência X(jω).

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$$

$$X(jt) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\omega)$$

2.4.10 Simetrias

Ao realizar a Transformada de Fourier de um sinal x(t) podemos observar algumas simetrias no sinal resultante analisando algumas características de x(t). Sendo estas as relações de simetria a baixo.

1. Para um sinal x(t) real e par, a sua Transformada será real e par.
2. Para um sinal x(t) real e ímpar, a sua Transformada será puramente imaginária e ímpar.
3. Para um sinal x(t) apenas real, a sua transformada terá tanto a parte real quando a parte imaginária, de forma que:

$$Re\{X(j\omega)\} \rightarrow sinal\ par$$

$$Im\{X(j\omega)\} \rightarrow sinal\ ímpar$$

Representando a transformada como uma exponencial complexa obtemos as seguintes relações:

$$X(j\omega) = |X(j)|e^{j\angle X(j)}$$
$$|X(j\omega)| \rightarrow sinal\ par$$
$$\angle X(j\omega) \rightarrow sinal\ \acute{\imath}mpar$$

Por fim, também temos a seguinte relação:

$$X(j\omega) = X^*(j)$$

2.4.11 Exemplo

Dada a onda quadrada aperiódica a seguir:

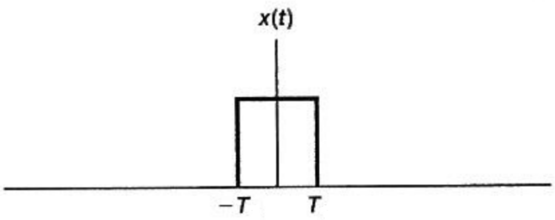

Figura 1: Onda Quadrada

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

Podemos calcular sua Transformada de Fourier por meio da expressão para o calculo da Transformada de Fourier apresentado acima:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t}dt$$
$$X(j\omega) = \frac{e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}}{-j\omega} = \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{j\omega}$$

Assim:

$$X(j\omega) = 2\frac{sen(\omega T)}{\omega}$$

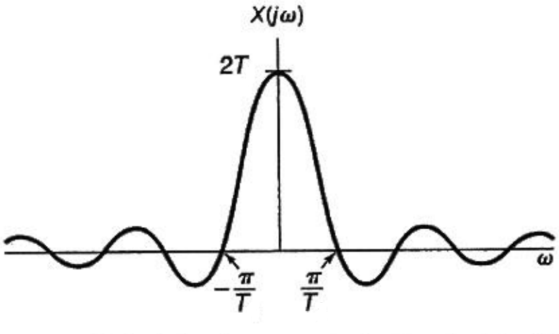

Figura 2: Gráfico da Transformada

3 Análise em Frequência de SLITs

Uma forma de facilitar a solução de sistemas descritos por equações diferenciais é o uso da Transformada de Fourier. Esse método de solução é justificado, pois ao realizar a transformada obtemos um sistema com equações sem derivadas e integrais por conta das seguintes relações:

$$\frac{d}{dt}x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(j\omega), \int x(t)dt \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)$$

Ao resolver o sistema no domínio da frequência, simplificamos o processo. Uma vez que tenhamos a solução nesse domínio, basta aplicar a Transformada Inversa de Fourier para traduzir essa solução de volta para o domínio do tempo. Usar essa estratégia oferece uma abordagem mais direta e eficiente para entender e representar a resposta do sistema ao longo do tempo. Para demonstrar o que foi dito anteriormente podemos utilizar o seguinte sistema.

$$x(t) = y(t) + a\frac{d}{dt}y(t)$$

Aplicando a Transformada de Fourier nesse sistema obtemos:

$$X(j\omega) = Y(j\omega) + aj\omega Y(j\omega)$$
$$X(j\omega) = Y(j\omega)(1 + aj\omega)$$
$$\frac{1}{1 + aj\omega}X(j\omega) = Y(j\omega)$$

Para finalizar a solução desse sistema é necessário apenas realizar a transformação inversa dessa expressão. Assim, chamando $H(j\omega) = \frac{1}{1+aj\omega}$ e utilizando a propriedade de transformada que relaciona multiplicação entre transformadas e convolução chegamos na seguinte expressão:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau) = y(t)$$

Importante de se ressaltar que o $H(j\omega)$ é a resposta em frequência de um sinal sendo dado pela transformada da resposta impulsiva.