Universidade Federal de Minas Gerais

ELT088 - Análise de Sistemas Dinâmicos Lineares

Sinais e Sistemas

Autores:
Felipe Meireles Leonel
Gabriel Costa Matsuzawa

20 de dezembro de 2023

Sumário

1 Sinais

Um sinal é um conjunto de dados que contém algum tipo de informação. Aplicando esse conceito no contexto da engenharia, dizemos que um sinal é uma função que apresenta algum tipo de informação sobre um fenômeno físico. Assim, podendo representar inúmeras grandezas físicas como por exemplo: tensão elétrica, corrente elétrica, força, entre outros.

1.1 Tempo contínuo X Tempo discreto

Os sinais podem ser representados de duas formas quando falamos em relação ao tempo: contínua e discreta. Ao representar um sinal por meio de tempo contínuo, estamos atribuindo um valor para o sinal para todo instante de tempo. Já quando se é representado um sinal por meio do tempo discreto, a informação possui amplitude quantizada e só é definida em valores inteiros do intervalo de tempo, ou seja, não há informação atribuída para todo instante de tempo. Para o tempo contínuo usa-se um sinal ***x(t)*** em relação a um tempo ***t*** e para o tempo discreto é utilizado a relação do sinal ***x[n]*** e do tempo de amostragem ***n***.

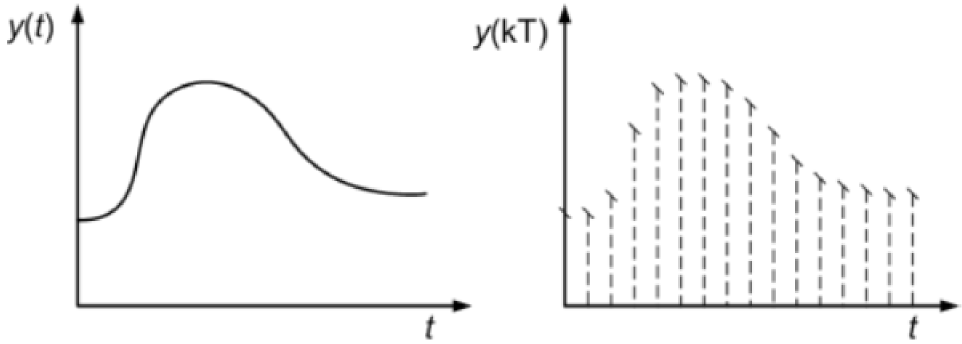

Figura 1: Sinal em tempo contínuo e em tempo discreto

1.2 Energia e Potência de um sinal

A energia total de um sinal representa o quanto de informação que o mesmo carrega, sendo calculada a partir das seguintes expressões para tempo contínuo e discreto, respectivamente:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt \qquad\qquad E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

É importante notar que sinais em que a informação carregada não é nula quando o tempo tende ao infinito apresentam energia total infinita. Para quantificar a informação desses sinais usamos o conceito de potência total, que nos diz o quanto de informação o sinal entrega por unidade de tempo. Para descobrir a potência total, utilizamos as seguintes expressões:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt \qquad\qquad P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Por fim, deve-se ressaltar que sinais com potência finita terão energia total infinita e sinais com energia total finita terão potência total nula:

$$0 < E_\infty < \infty \qquad \to \qquad P_\infty = 0 \qquad\qquad \textit{Sinal de energia}$$

$$E_\infty = \infty \qquad \to \qquad 0 < P_\infty < \infty \qquad\qquad \textit{Sinal de potência}$$

1.3 Transformação de sinais

A partir de algumas mudanças em um sinal podemos gerar algumas alterações previsíveis. Dessa forma, para o estudo de Sistemas Dinâmicos é de extrema importância ter um domínio sobre essas transformações. A seguir serão apresentadas algumas destas.

1.3.1 Deslocamento e Multiplicação do sinal

Considerando um sinal x(t):

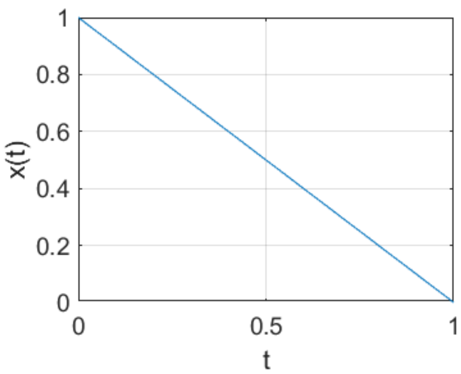

Figura 2: Sinal x(t) = 1 - t

O deslocamento desse sinal é dado por $x(t) + c$, enquanto a multiplicação é o tipo $Kx(t)$:

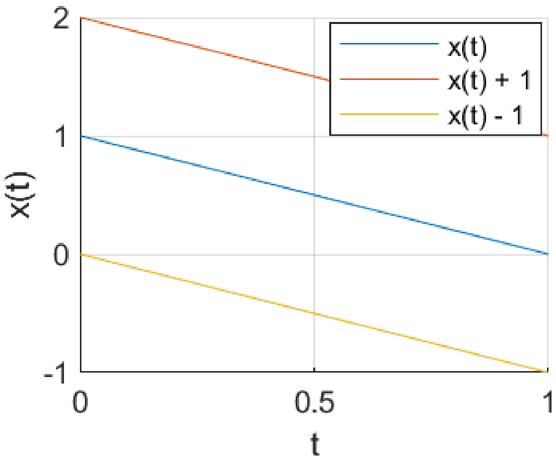

Figura 3: Deslocamento do sinal

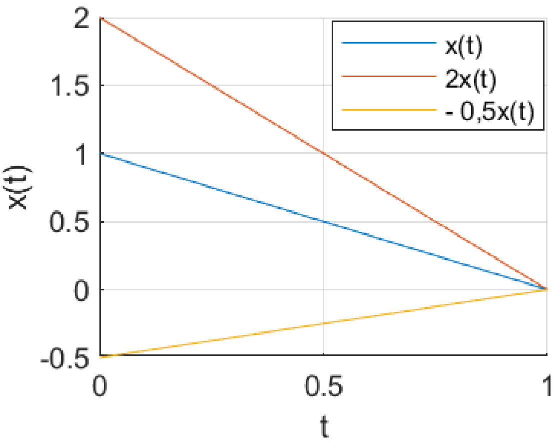

Figura 4: Multiplicação do sinal

1.3.2 Deslocamento no tempo

Essa transformação ocorre quando fazemos algum deslocamento no tempo do sinal. Fazemos isso a partir da soma à variável tempo de formato $x(t - t_0)$.

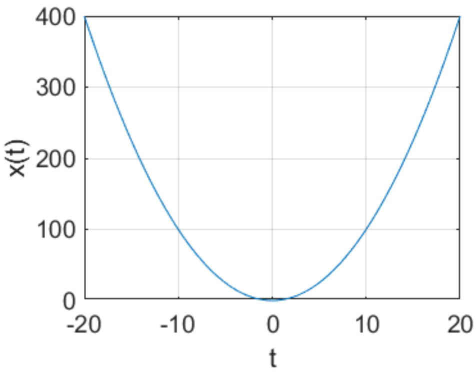

Figura 5: Sinal x(t) = t^2

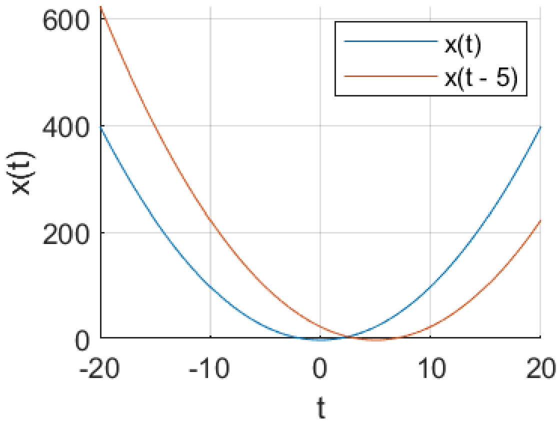

Figura 6: Deslocamento para x(t - 5)

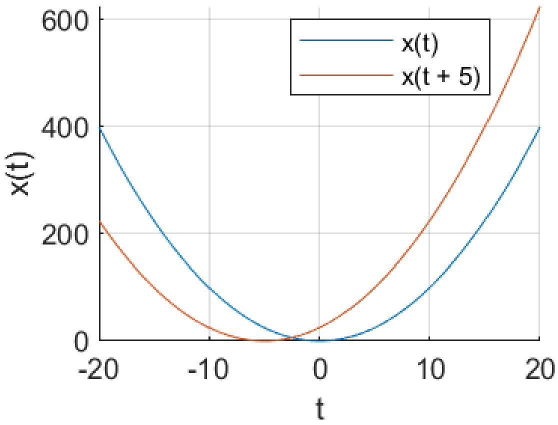

Figura 7: Deslocamento para x(t + 5)

Percebe-se pelos gráficos que se $t_0 > 0$ o sinal ficará atrasado, se deslocando para a direita e se $t_0 < 0$ o sinal estará adiantado, movendo para a esquerda.

1.3.3 Reflexão no tempo

Essa transformação ocorre quando invertemos o sinal ao redor do eixo x(t), tornando o sinal igual a x(-t):

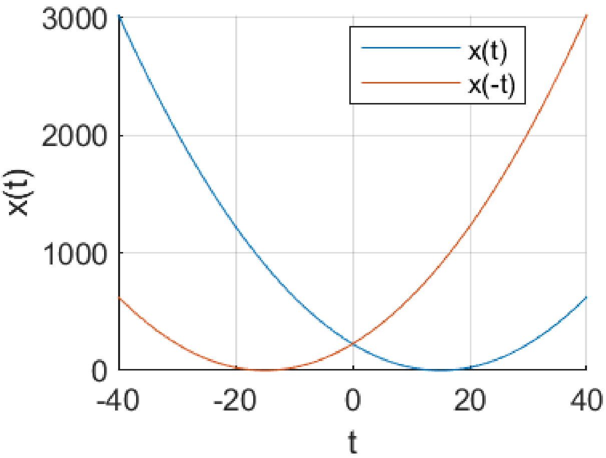

Figura 8: Reflexão do sinal

1.3.4 Mudança de Escala no tempo

Essa transformação ocorre quando fazemos algum tipo de divisão ou multiplicação no domínio do tempo. É importante de se notar que quando trabalhamos com sinais em tempo discreto esse tipo de transformação pode levar a uma perda de informação.

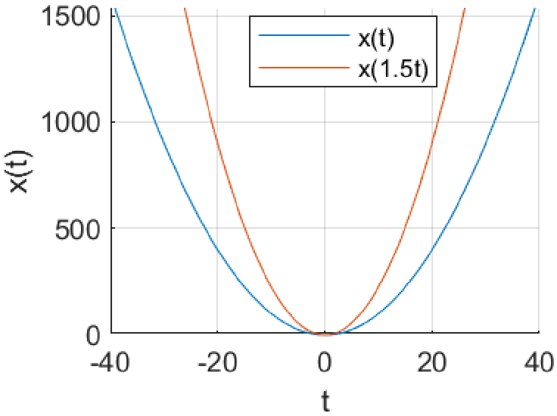

Figura 9: Mudança para x(1.5t)

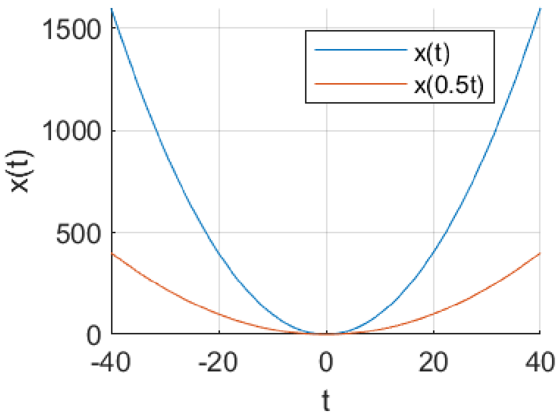

Figura 10: Mudança para x(0.5t)

1.3.5 Simetria de sinais

Uma importante propriedade dos sinais é a simetria. Existem dois tipos de simetria: a simetria par, em que $x(t) = x(-t)$ e a simetria ímpar, na qual $x(t) = -x(-t)$:

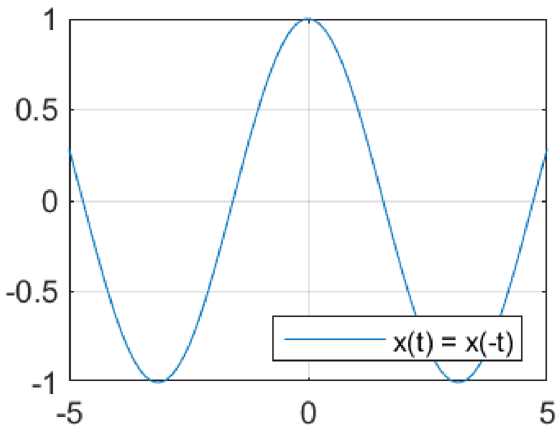

Figura 11: Simetria par

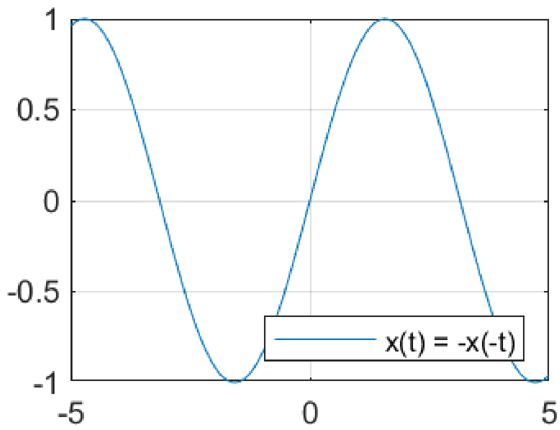

Figura 12: Simetria ímpar

1.4 Sinais importantes

1.4.1 Degrau unitário

O degrau unitário **u(t)** ou **u[n]** é uma função que apresenta $x(t) = 1$ para todo $t > 0$ e $x(t) = 0$ para todo $t < 0$, tendo sua representação gráfica da seguinte forma:

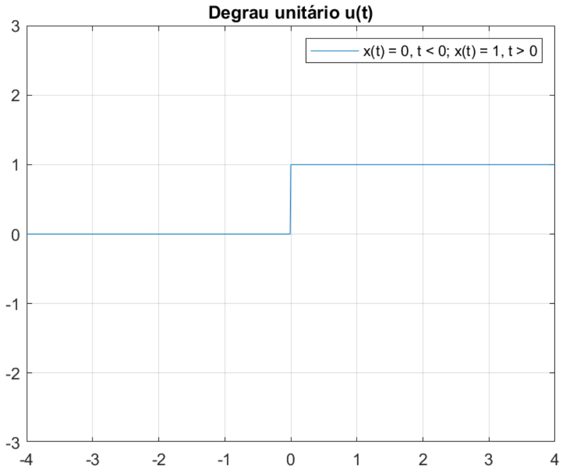

Figura 13: Degrau em tempo contínuo

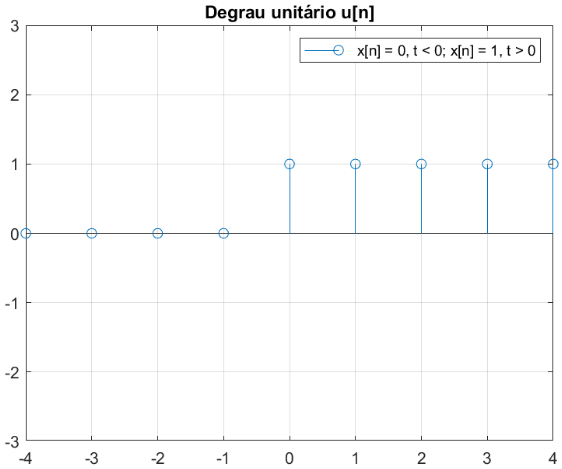

Figura 14: Degrau em tempo discreto

1.4.2 Impulso unitário

O impulso unitário $\delta(t)$ ou $\delta[n]$ é uma função de área igual a 1 e duração infinitesimal, em que sua definição vem da área de um retângulo com base de comprimento que tende a 0.

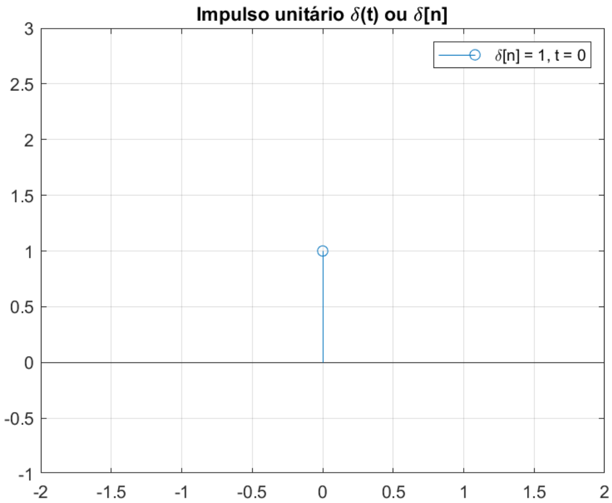

Figura 15: Impulso unitário

1.4.3 Sinal exponencial

De forma geral um sinal exponencial pode ser representado da seguinte forma:

$$x(t) = Ae^{rt}e^{j(\omega_0 t+\phi)} \qquad \rightarrow \qquad x(t) = Ae^{rt+j(\omega_0 t+\phi)}$$

$$x[n] = Ae^{rn}e^{j(\omega_0 n+\phi)} \qquad \rightarrow \qquad x[n] = Ae^{rn+j(\omega_0 n+\phi)}$$

Em que A e r são constantes. Para analisar esse tipo de sinal, iremos primeiro ver como ele se comporta quando as constantes associadas ao número complexo j são nulas.

$$x(t) = Ae^{rt} \qquad\qquad x[n] = Ae^{rn}$$

Nesse caso, temos uma exponencial que pode ter dois tipos de comportamentos dependendo se é negativo ou não.

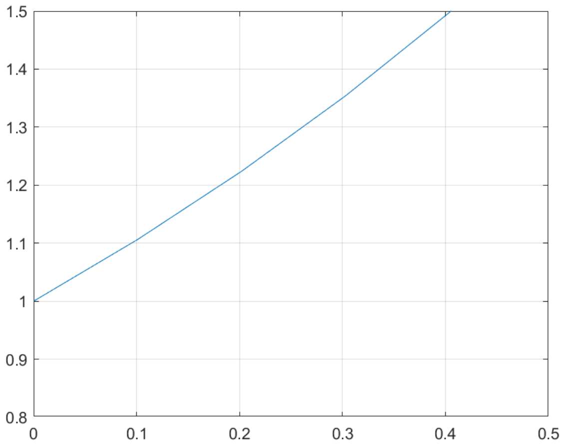

Figura 16: Exponencial com r > 0

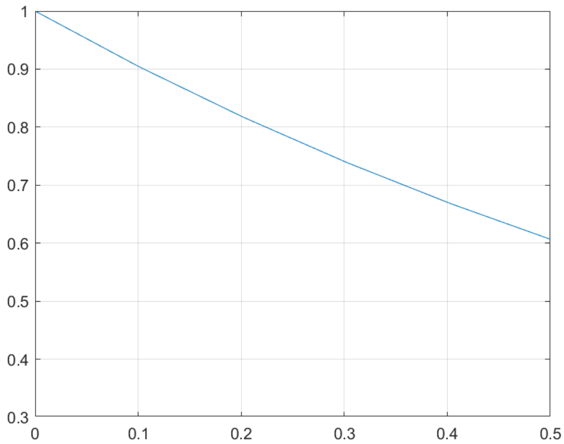

Figura 17: Exponencial com r < 0

Agora, iremos analisar quando o sinal tem apenas a constante r nula.

$$x(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\phi)} \qquad\qquad x[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\phi)}$$

Nesse caso temos um fasor, sinal que representa um vetor girante no plano complexo e que carrega em si dois sinais. Um cosseno associado a parte real e um seno associado a uma parte imaginária. Importante ressaltar que a constante ω_0 nos dá o valor da frequência associada às funções trigonométricas do fasor por meio da seguinte relação:

$$\omega_0 = 2\pi f$$

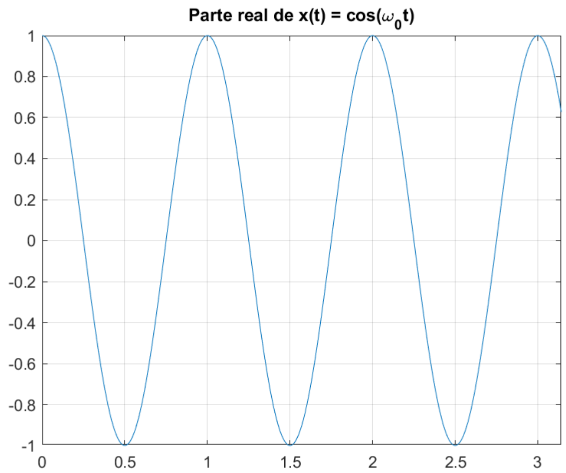

Figura 18: Parte real do fasor

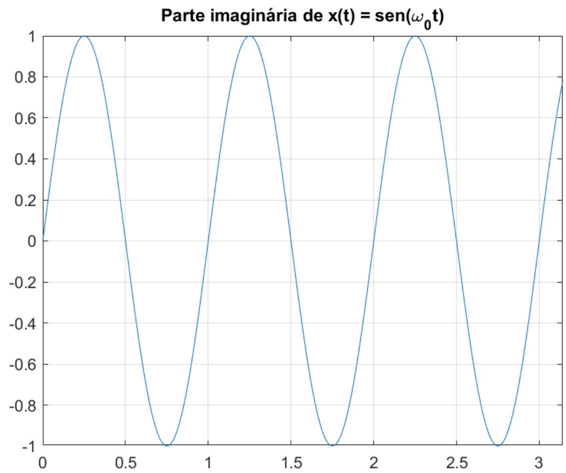

Figura 19: Parte imaginária do fasor

Por fim, para analisar todos os possíveis sinais que podem ser gerados a partir de uma exponencial devemos entender como a exponencial se comporta no caso em que todas as constantes não são nulas.

$$x(t) = Ae^{rt+j(\omega_0 t+\phi)} \qquad x[n] = Ae^{rn+j(\omega_0 n+\phi)}$$

Nesse caso teremos um fasor amortecido, ou seja, as funções trigonométricas irão crescer indefinidamente ou irão tender para a 0 quando o tempo vai para o infinito. Elas irão crescer para todo $r > 0$ e decair para todo $r < 0$.

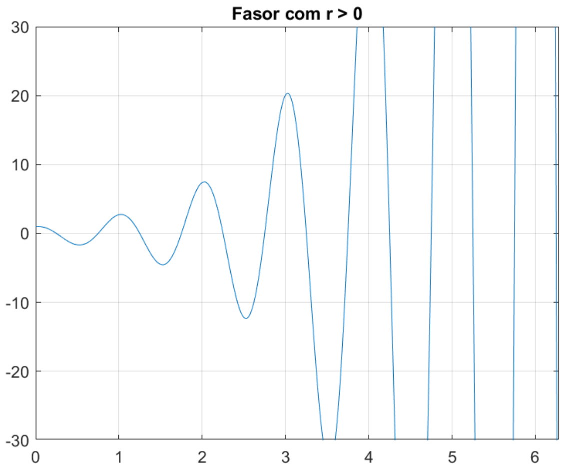

Figura 20: Crescimento indefinido

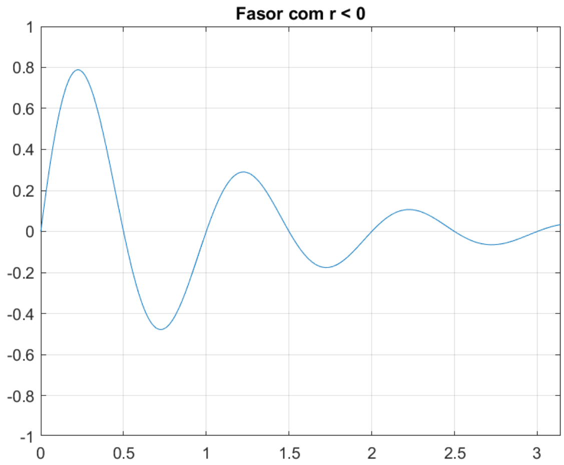

Figura 21: Fasor amortecido

2 Sistemas

Um sistema é uma função de transformação que relaciona uma entrada com uma saída. Na engenharia, essas entidades são empregadas para modelar diversos fenômenos físicos, permitindo sua análise. A representação desses sistemas pode ser realizada em termos de tempo discreto ou contínuo, dependendo da aplicação específica em questão.

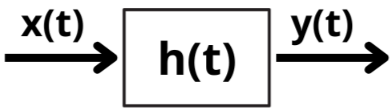

Figura 22: Sistema

2.1 Interconexões de sistemas

Para descrever determinado fenômeno físico pode ser necessário associar alguns sistemas para obter o resultado desejado. Dessa forma, arranjamos os sistemas por meio de interconexões que podem ser em cascata (série), em paralelo ou realimentando o mesmo sistema com suas saídas. Para representar essas interconexões utilizamos o que chamamos de diagramas de blocos.

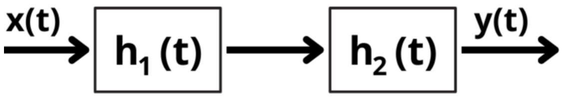

Figura 23: Sistemas em série

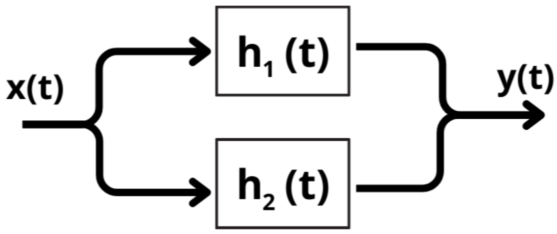

Figura 24: Sistemas em paralelo

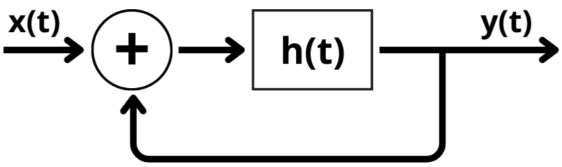

Figura 25: Sistema com realimentação

2.2 Propriedades de sistemas

2.2.1 Memória

Um sistema tem memória quando a sua saída depende da entrada em instantes de tempo diferentes do atual, ou seja, a saída depende da entrada no futuro ou no passado.

Os sistemas abaixo apresentam memória, pois necessitam de entradas diferentes da atual para gerar sua saída.

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad\qquad y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Já os exemplos apresentados abaixo não apresentam memória, pois só dependem da entrada atual.

$$y(t) = sen(x(t)) \qquad\qquad y[n] = ln\, x[n]$$

2.2.2 Causalidade

Um sistema é causal quando sua saída depende apenas da sua entrada no passado ou no presente. Caso a saída do sistema dependa de uma entrada futura ele não é causal.

Abaixo, temos um sinal causal. Em um primeiro momento pode parecer que a saída é influencia por entradas futuras, porém o termo (t+1) não é uma entrada futura. A única entrada que influencia na saída é x(t). Fato análogo ocorre para o caso em tempo discreto.

$$y(t) = x(t)(t+1) \qquad\qquad y[n] = x[n](t+1)$$

Nesse caso o sistema não é causal, porque a saída é influenciada pela entrada x(t+1).

$$y(t) = cos(|x(t+1)|) \qquad\qquad y[n] = cos(|x[n+1]|)$$

2.2.3 Invariância no tempo

Um sistema é invariante no tempo quando seu comportamento e característica não variam com o tempo. Uma forma de saber se um sistema é invariante ou não é fazendo um deslocamento temporal na entrada e observar se a saída do sistema será igualmente deslocada no tempo.

Considerando o sistema abaixo, iremos aplicar o teste citado acima para saber se ele é ou não invariante no tempo.

$$y(t) = tg^{-1}\, x(t)$$

Para isso, iremos definir:

$$y_1(t) = tg^{-1}\, x_1(t)$$
$$x_2(t) = x_1(t - t_0)$$

Em que x_2 é igual a x_1 porém atrasado. Comparando agora y_1 e y_2:

$$y_2(t) = tg^{-1}\, x_2(t)$$
$$y_2(t) = tg^{-1}\, x_1(t - t_0)$$
$$y_2(t) = y_1(t - t_0)$$

Assim, uma variação de tempo na entrada gera a mesma variação de tempo na saída. Então, o sistema é caracterizado como invariante no tempo. O teste seria feito da mesma forma caso o sistema fosse representado em tempo discreto.

Partindo para outro exemplo, iremos novamente usar o teste para dizer se o sistema abaixo é ou não invariante no tempo.

$$y(t) = tx(t)$$

Primeiramente, iremos definir:

$$y_1 = tx_1(t)$$
$$x_2(t) = x_1(t - t_0)$$

E a partir das definições anteriores comparamos y_1 e y_2:

$$y_2 = tx_2(t)$$
$$y_2 = tx_1(t - t_0)$$
$$y_2 \neq y_1(t - t_0) \quad \rightarrow \quad tx_1(t - t_0) \neq (t - t_0)\, x_1(t - t_0))$$

Assim, o sistema não é invariante no tempo.

2.2.4 Estabilidade

Um sistema é estável quando para qualquer sinal de entrada limitado a saída também seja limitada. Um sinal limitado é aquele que para todo domínio do tempo sua amplitude nunca divirja, ou seja, nunca vai para o infinito.

Abaixo temos um sinal estável, constatamos isso porque, considerando que a entrada é limitada, a exponencial nunca irá tender para o infinito pelo fato da entrada nunca tender para o infinito.

$$y(t) = e^{x(t)}$$

Acontece o contrário no caso abaixo, porque quando a entrada tende a 0 temos a saída tendendo para o infinito.

$$y(t) = ln\, x(t)$$

2.2.5 Linearidade

Um sistema é linear quando satisfaz as condições de aditividade e homogeneidade, ou seja, a saída pode ser escrita por uma combinação ponderada de entradas.

$$G\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 G\{x_1\} + \alpha_2 G\{x_2\}$$

3 Sistemas lineares invariantes no tempo

Um Sistema Linear Invariante no Tempo (SLIT) é um sistema que necessariamente apresenta as propriedades de linearidade e invariância no tempo. Estes têm fundamental importância na engenharia pois conseguem modelar inúmeros fenômenos físicos fundamentais para áreas como comunicações e controle.

3.1 Resposta ao impulso

A resposta ao impulso de um sistema é a saída gerada quando um impulso é aplicado à sua entrada. Essa resposta é crucial ao lidar com Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLIT), pois fornece informações fundamentais sobre o comportamento do sistema. A importância dessa resposta reside na capacidade de utilizar essa informação para determinar a resposta do sistema a qualquer sinal de entrada.

3.2 Convolução

A convolução é a operação matemática que é utilizada para relacionar a resposta impulsiva do sistema com a saída do sistema para qualquer sinal. Ela pode ser expressa pela seguinte expressão:

$$f * g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\, g[n-k] \qquad\qquad f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

De maneira geral, a convolução realiza uma operação de soma ponderada entre um sinal g que é deslocado ao longo do eixo do tempo, e os pesos são associados a cada valor do sinal f.