Universidade Federal de Minas Gerais

ELT088 - Análise de Sistemas Dinâmicos Lineares

Números Complexos e Fasores

Autores:
Felipe Meireles Leonel
Gabriel Costa Matsuzawa

20 de dezembro de 2023

Sumário

1 Números Complexos

Números complexos é um conceito matemático que estende os números reais ao adicionar a unidade imaginária i . É possível entender melhor os número complexos pelo plano complexo, considerando um número como composto por coordenadas:

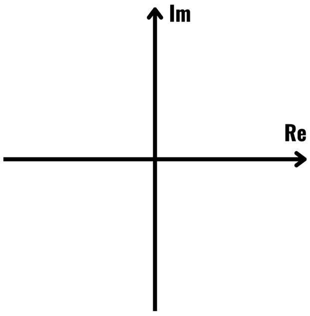

Figura 1: Plano complexo

Em Engenharia Elétrica, como a variável i normalmente é utilizada para representar corrente, adota-se j para representar um número complexo, em que:

$$j^2 = -1$$

Qualquer número por ser representado na forma $\mathbf{z} = \mathbf{a} + \boldsymbol{j}\mathbf{b}$, em que **a** é parte real e **b** é a parte imaginária. Se b = 0 o número é puramente real e se a = 0 ele é puramente imaginário.

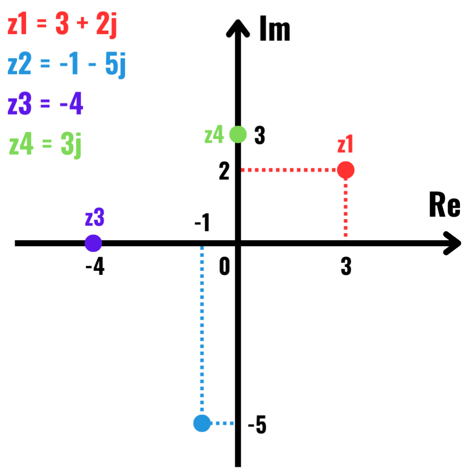

Figura 2: Exemplos da representação de números complexos

O formato $\mathbf{z = a + \boldsymbol{j}b}$ é chamado de representação retangular de um número. Além desse, os números também são comumente representados na sua forma exponencial $\mathbf{z = Ae^{j\theta}}$ e na sua forma polar $\mathbf{z = r}\angle\theta$. Para realizar a conversão entre os formatos retangular e polar utilizamos as fórmulas:

Forma retangular	Forma polar
$z = a + jb$	$z = r\angle\theta$
$a = r\ cos\theta$	$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
$b = r\ sen\theta$	$\theta = tan^{-1}(b/a)$

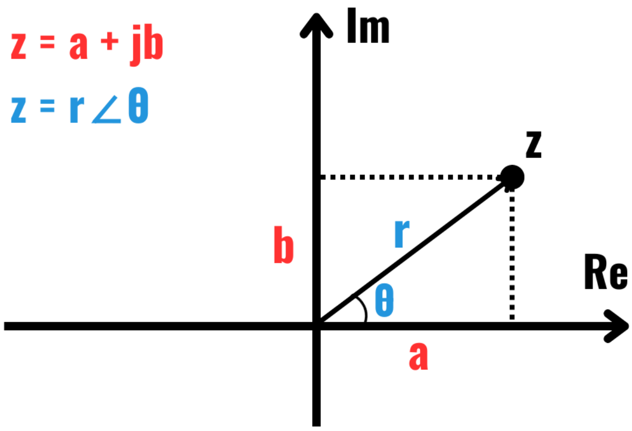

Figura 3: Mudança de coordenadas

Considerando $\mathbf{z_1} = \mathbf{a_1} + \jmath\mathbf{b_1} = \mathbf{r_1}\angle\theta_1$ e $\mathbf{z_2} = \mathbf{a_2} + \jmath\mathbf{b_2} = \mathbf{r_2}\angle\theta_2$, tem-se que as operações matemáticas básicas de adição e subtração de números complexos são facilmente realizadas na forma retangular:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

Já a multiplicação e divisão são facilitadas se feitas na forma polar:

$$z_1 * z_2 = (r_1 * r_2)\angle(\theta_1 + \theta_2)$$

$$z_1/z_2 = (r_1/r_2)\angle(\theta_1 - \theta_2)$$

Outro conceito importante dos números complexos é o conjugado de certo número:

$$z = a + jb \qquad \longrightarrow \qquad z^* = a - jb$$

$$z = r\angle\theta \qquad \longrightarrow \qquad z^* = r\angle-\theta$$

2 Fasores

Os fasores são vetores girantes no plano complexo. Mas o que isso significa? Para entender esse conceito, primeiramente devemos saber que essa abordagem se baseia na identidade de Euler, uma expressão matemática que relaciona números complexos com funções trigonométricas. Sendo definida por:

$$e^{j\theta} = cos(\theta) + jsen(\theta)$$

Dessa forma, quando representarmos esse número complexo no plano complexo teremos uma componente para o eixo imaginário $sen(\theta)$ e uma para o eixo real $cos(\theta)$. Podemos, assim, representá-lo por meio do vetor $< cos(\theta), sen(\theta) >$.

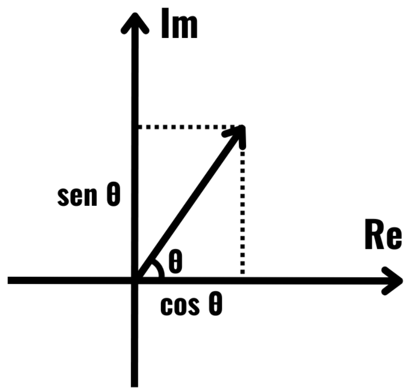

Figura 4: Vetor representado no plano complexo

Para caracterizar o vetor acima como um fasor precisamos apenas fazer ele girar. Para isso é necessário adicionar uma forma do seno e o cosseno variar no tempo. Para conseguirmos ter esse efeito, fazemos com que o vetor seja escrito pela seguinte expressão:

$$< cos(\omega t), sen(\omega t) >$$

Sendo igual a frequência associada ao vetor e t uma variável que representa o tempo.

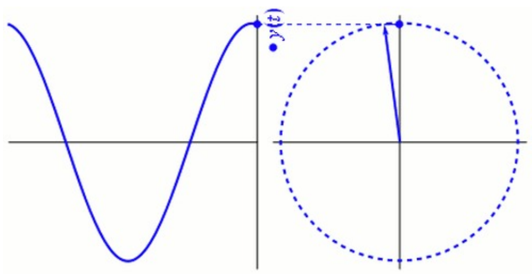

Figura 5: Fasor

Para representar o fasor também é importante entender o conceito de fase. Ele nos dá o ângulo inicial do nosso vetor e sua representação fica na seguinte forma:

$$< cos(\omega t + \phi), sen(\omega t + \phi) >$$

, sendo ϕ a fase.

Como uma análise geral, o importante de se entender sobre fasores é que ele é uma função que consegue representar dois sinais (um senoidal e outro cossenoidal) e por ser definido por uma exponencial facilita muito os cálculos relacionados a inúmeras equações. Um tipo específico de equação que sua solução muitas vezes é feita de forma mais tranquila utilizando fasores são as equações diferenciais. Isso ocorre porque o processo de diferenciação e integração é muito facilitado pelas expressões abaixo:

$$\int e^{j(\omega t\ +\ \phi)}\,dt = \frac{1}{j\omega}\ e^{j(\omega t\ +\ \phi)}$$

$$\frac{d(e^{j(\omega t\ +\ \phi)})}{dt} = j\omega e^{j(\omega t\ +\ \phi)}$$

Com relação a aplicações, os fasores têm uma grande importância para a Engenharia Elétrica. A representação simplificada proporcionada pelos fasores permite uma abordagem eficiente na determinação de grandezas elétricas, na resolução de equações complexas e na compreensão do comportamento dos sistemas elétricos. Essa ferramenta matemática é uma grande facilitadora quando falamos sobre análise de sistemas de potência, otimização de redes elétricas e projeto de equipamentos eletrônicos.

3 Exercícios

1. Expresse cada um dos números complexos a seguir na forma polar e represente-os graficamente no plano complexo, indicando o módulo e o ângulo de número.

a) $1 + j\sqrt{3}$

b) -5

c) $-5 - j5$

d) $3 + j4$

2. Expresse na forma retangular, indicando o as partes real e imaginária dos números no plano complexo.

a) $3\angle -30°$

b) $4\angle 180°$

c) $2\angle \frac{\pi}{3}$

d) $6\angle 120°$

3. Considerando $z_1 = 3 + j\sqrt{3}$ e $z_2 = 1 + j\sqrt{3}$, faça:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 * z_2$

c) $\frac{z_1}{z_2}$

d) $z_1^* + \frac{z_1}{z_2^*}$

4 Resolução

1. Sabendo que para transformar de coordenadas retangulares para coordenadas polares podemos usar $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = tan^{-1}(\frac{b}{a})$, temos:

a) $1 + j\sqrt{3}$, sendo $a = 1$ e $b = \sqrt{3}$

$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\theta = tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{1}) = 60°$

Assim, $z = 2\angle 60°$

b) -5, sendo $a = -5$ e $b = 0$

$r = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25 + 0} = \sqrt{25} = 5$

$\theta = tan^{-1}(\frac{0}{-5}) = 0°$ ou $180°$, como a é negativo, temos que θ será igual a $180°$.

Assim, $z = 5\angle 180°$

c) $-5 - j5$, sendo $a = -5$ e $b = -5$

$r = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\theta = tan^{-1}(\frac{-5}{-5}) = 45°$, como ambas partes são negativas, o equivalente será a $135°$.

Assim, $z = 5\sqrt{2}\angle 135°$

d) $3 + j4$, sendo $a = 3$ e $b = 4$

$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$\theta = tan^{-1}(\frac{4}{3}) = 53,13°$

Assim, $z = 5\angle 53,13°$

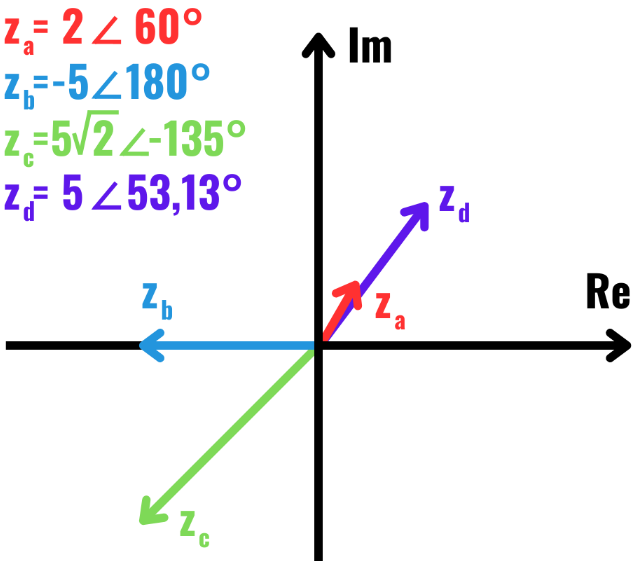

Figura 6: Gráfico da questão 1

2. Para fazer o processo reverso de transformação, utilizamos as fórmulas $a = r\ cos\theta$ e $b = r\ sen\theta$:

a) $3\angle -30°$, sendo $r = 3$ e $\theta = -30°$

$a = 3\ cos(-30°) = 3 * \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,6$

$b = 3\ sen(-30°) = 3 * (-\frac{1}{2}) = -1,5$

Assim, $z = 2,6 - j1,5$

b) $4\angle 180°$, sendo $r = 4$ e $\theta = 180°$

$a = 4\ cos(180°) = 4 * (-1) = -4$

$b = 4\ sen(180°) = 4 * 0 = 0$

Assim, $z = -4$

c) $2\angle\frac{\pi}{3}$, sendo $r = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$

$a = 2\ cos(\frac{\pi}{3}) = 2 * \frac{1}{2} = 1$

$b = 2\ sen(\frac{\pi}{3}) = 2 * \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,7$

Assim, $z = 1 + j1,7$

d) $6\angle 120°$, sendo $r = -6$ e $\theta = 120°$

$a = 6\ cos(120°) = 6 * (-\frac{1}{2}) = -3$

$b = 6\ sen(120°) = 6 * \frac{\sqrt{3}}{2} = 5,2$

Assim, $z = -3 + j5,2$

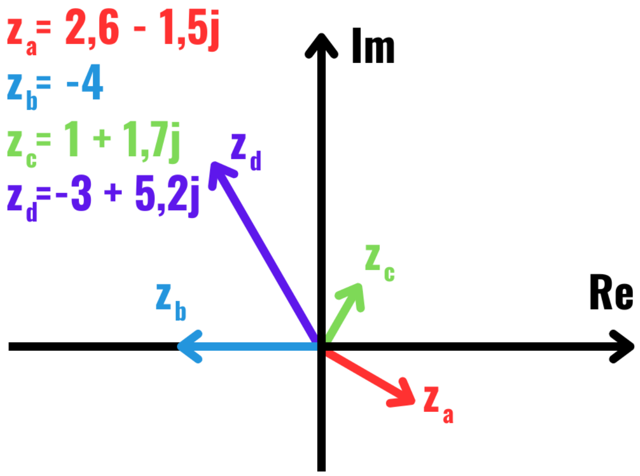

Figura 7: Gráfico da questão 2

3. Lembrando que $z_1 = 3 + j\sqrt{3}$ e $z_2 = 1 + j\sqrt{3}$:

a) $z_1 + z_2 = (3 + 1) + j(\sqrt{3} + \sqrt{3})$

$z_1 + z_2 = 4 + j(2\sqrt{3}) = 4 + j3,5$

b) $z_1 * z_2$, em que $z_1 = 3,5\angle 30°$ e $z_2 = 2\angle 60°$

$z_1 * z_2 = (3,5 * 2)\angle(30° + 60°)$

$z_1 * z_2 = 7\angle 90°$

c) $\frac{z_1}{z_2} = (3,5/2)\angle(30°$ - $60°)$

$\frac{z_1}{z_2} = 1,75\angle - 30°$

d) $z_1^* + \frac{z_1}{z_2^*}$, em que $z_1^* = 3 - j\sqrt{3}$ e $z_2^* = 2\angle(-60°)$

$\frac{z_1}{z_2^*} = (3,5/2)\angle(30° + 60°)$

$\frac{z_1}{z_2^*} = 1,75\angle 90° = j1,75$

$z_1^* + \frac{z_1}{z_2^*} = (3 - j\sqrt{3}) + (j1,75) = 3 + j0,02$

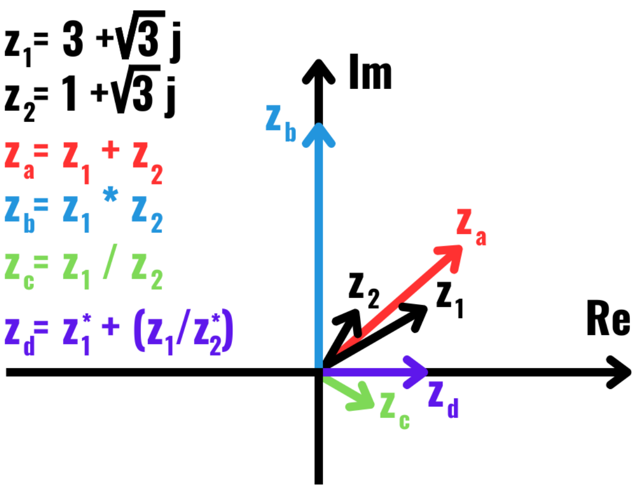

Figura 8: Gráfico da questão 3